SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS.
(http://profeblog.es/blog/luismiglesias)

1. Ecuaciones con dos incógnitas.

En este apartado vamos a tratar con ecuaciones con dos incógnitas. Por ejemplo, $2x - 5y = 7$ es una ecuación con dos incógnitas.

El par de valores $x = 6$, $y = 1$ es solución de esta ecuación porque $2 \cdot 6 - 5 \cdot 1 = 7$.

Definición: Llamamos solución de una ecuación con dos incógnitas a todo par de valores que hacen cierta la igualdad. Cabe destacar que si sólo tenemos una ecuación con dos incógnitas, tendremos infinitas soluciones.

Las ecuaciones lineales se representan mediante rectas.

2. Sistemas de Ecuaciones.

Definición: Dos ecuaciones forman un sistema cuando lo que pretendemos de ellas es encontrar su solución común.

Cuando dos ecuaciones con dos incógnitas forman un sistema, las ponemos de esta forma: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Se llama solución de un sistema de ecuaciones a la solución común de ambas.

3. Sistemas equivalentes.

Definición: Dos sistemas de ecuaciones se dicen equivalentes cuando tienen la misma solución.

4. Clasificación de los sistemas de ecuaciones, en función del número de soluciones.

4.1. Sistemas sin solución.

Hay sistemas cuyas ecuaciones dicen cosas contradictorias.

Por ejemplo: $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$ En este caso, nos dice por una parte que 2x+3y=15 y por otra que 2x+3y=9 y eso es absolutamente imposible porque para eso tendrían que adoptar las incógnitas valores distintos en cada ecuación y entonces no sería un sistema de ecuaciones.

Así, sacamos la conclusión de que el sistema no tiene soluciones comunes y entonces se dice que el ***sistema es incompatible*.**

La representación gráfica de este tipo de sistemas, nos muestra que las rectas de ambas ecuaciones son rectas paralelas y, por tanto, no se cortan.

4.2. Sistemas con infinitas soluciones.

Hay sistemas cuyas ecuaciones dicen lo mismo o que una ecuación es proporcional a la otra, es decir, tenemos dos veces la misma ecuación. Veamos dos ejemplos: $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$ (1) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 4x + 6y = 30 \end{cases}$ (2)

En el ejemplo (1) tenemos que las dos ecuaciones son idénticas y en el ejemplo (2) tenemos que la segunda ecuación es la misma, pero multiplicada por 2, entonces si dividimos toda la ecuación por 2, obtendremos de nuevo que tenemos dos ecuaciones idénticas.

En este caso el ***sistema*** se llamará ***compatible indeterminado***, porque tiene soluciones, pero éstas son infinitas.

La representación gráfica de este tipo de sistemas, nos muestra que las rectas de ambas ecuaciones son rectas coincidentes, es decir, son la misma recta y, por tanto, se cortan en infinitos puntos.

4.3. Sistemas con una única solución.

Por último, hay sistemas de ecuaciones, cuyas ecuaciones no presentan relación aparente. Este tipo de sistemas, tienen una única solución, es decir, ambas ecuaciones sólo tienen una solución común.

Ejemplo: $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$ En este caso el ***sistema*** se llamará ***compatible determinado***, tiene una única solución.

La representación gráfica de este tipo de sistemas, nos muestra que las rectas de ambas ecuaciones son rectas secantes, se cortan en un único punto.

5. Métodos de resolución de Sistemas de Ecuaciones.

5.1. Método de Sustitución.

Este método de resolución de un sistema de ecuaciones consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir en la otra.

Describamos los pasos que conviene dar para aplicar este método:

1º. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.

2º. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.

3º. Se resuelve esta ecuación.

4º. El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.

5º. Se ha obtenido, así, la solución.

RESOLUCIÓN DEL SISTEMA

$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

POR EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Despejamos la x en la 2ª ecuación:

$$x = 2y - 1$$

$$2(2y - 1) + 3y = 19$$

$$4y - 2 + 3y = 19 \rightarrow y = 3$$

$$x = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

Solución: $x = 5,\ y = 3$

5.2. Método de igualación.

Éste método consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las expresiones resultantes.

Describamos los pasos que conviene dar para aplicar este método:

1º. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

2º. Se igualan las expresiones, lo cual da lugar a una ecuación con una incógnita.

3º. Se resuelve esta ecuación.

4º. El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejara la otra incógnita.

5º. Se ha obtenido así la solución.

RESOLUCIÓN DEL SISTEMA

$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

POR EL MÉTODO DE IGUALACIÓN

$$\begin{cases} x = \dfrac{19 - 3y}{2} \\ x = -1 + 2y \end{cases}$$

$$\frac{19 - 3y}{2} = -1 + 2y$$

$$19 - 3y = 2(-1 + 2y) \rightarrow y = 3$$

$$x = -1 + 2 \cdot 3 = 5$$

Solución: $x = 5,\ y = 3$

5.3. Método de Reducción.
Este método consiste en preparar las dos ecuaciones para que una de las incógnitas tenga coeficientes opuesto en ambas ecuaciones. Sumando después las ecuaciones resultantes, miembro a miembro, se obtiene una ecuación con sólo una incógnita (se ha reducido el número de incógnitas).

Resumamos los pasos que debemos dar:

1º. Se preparan las dos ecuaciones (multiplicándolas por los números que convenga).

2º. Al sumarlas desaparece una de las incógnitas.

3º. Se resuelve la ecuación resultante.

4º. El valor obtenido se sustituye en una de las iniciales y se resuelve.

5º. Se obtiene, así, la solución.

**Ejercicio resuelto por el método de reducción:*

$$\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 5x + 2y = 15 \end{cases}$$

Puesto que el coeficiente de la y en la primera ecuación es doble que en la segunda, multiplicando ésta por 2 se igualarán los coeficientes. Restando, se eliminará esta incógnita.

$\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 5x + 2y = 15 \end{cases} \rightarrow$ *Multiplicando por -2:* $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ -10x - 4y = -30 \end{cases}$

Ahora, sumando ambas ecuaciones se obtiene lo siguiente: -7x = -21; x = $\frac{-21}{-7}$ = 3;

Ahora sustituimos x=3 en cualquiera de las expresiones iniciales ➔ 3x+4y=9 ➔ 3·3+4y=9 ➔ 4y=0 ➔ y=0.

5.4. Método Gráfico.

Para obtener las soluciones de dos incógnitas se despeja una de ellas y se le dan valores a la otra.

Si representamos las dos ecuaciones que forman un sistema como dos rectas, se puede observar que el punto donde se cortan dichas rectas (si se cortan) es la solución al sistema.

Ejemplo: $\begin{cases} x + y = 5 & y = 5 - x \\ 2x - y = 7 & y = 2x - 7 \end{cases}$

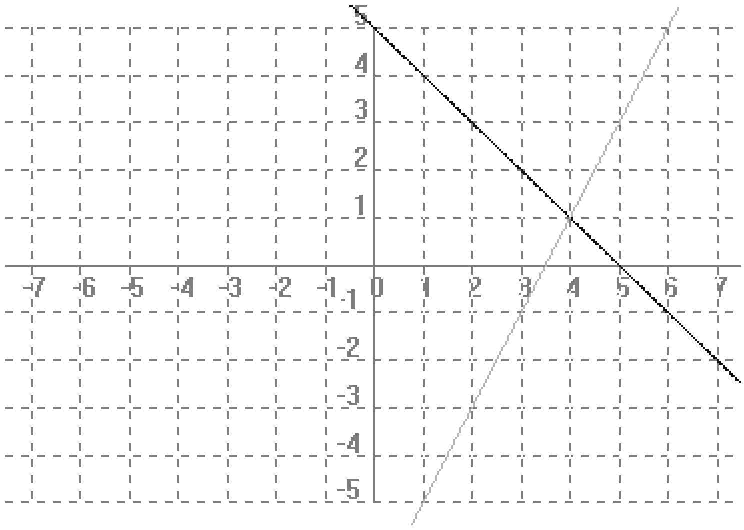
x	-1	0	1	2	3	4
y	6	5	4	3	2	1

Tabla de la 1ª Ecuación

x	-1	0	1	2	3	4
y	-9	-7	-5	-3	-1	1

Tabla de la 2ª Ecuación

Representación gráfica de ambas ecuaciones. Aquí podemos observar cómo la solución del sistema es x=4 e y=1



6. Reglas prácticas para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Si una o las dos ecuaciones del sistema tienen un aspecto externo complicado, se empieza por "arreglarlas" hasta llegar a colocar las dos ecuaciones en forma general, es decir, de la forma: $ax+by=c$.

Recordemos las ventajas de cada uno de los tres métodos analíticos estudiados:

* El método de sustitución es especialmente útil cuando una de las incógnitas tiene coeficiente 1 ó -1 en alguna de las ecuaciones.

* El método de igualación es especialmente útil cuando una de las incógnitas tiene coeficientes 1 ó -1 en ambas ecuaciones, puesto que al despejarlas e igualarlas, las expresiones resultantes no tendrán denominadores.

* El método de reducción es muy cómodo de aplicar cuando una de las incógnitas tiene el mismo coeficiente en las dos ecuaciones o bien sus coeficientes son uno múltiplo del otro.